Aula 19

Definição: Dado um espaço métrico (X, d), em que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é a função distância, ou métrica, e uma aplicação $T : X \to X$, diz-se que T é uma **contração** se existe $0 \leq K < 1$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq K d(x, y).$$

Diz-se que $x \in X$ é um **ponto fixo** de T se $Tx = x$.

Teorema do Ponto Fixo (Banach): Seja (X, d) um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração. Então, T tem um ponto fixo em X e ele é único. Esse ponto fixo pode ser obtido pelo limite da sucessão recursiva

$$\lim_n x_n = \lim_n T^n(x_0) = \lim_n \underbrace{T(T(T(\cdots T}_{n}(x_0)))$$

para qualquer ponto inicial $x_0 \in X$.

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Diz-se que $\mathbf{f}$ é **Lipschitz**, ou **lipschitziana**, **relativamente à variável** $\mathbf{y}$ se existe $L > 0$ tal que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{y}})\| \leq L\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|,$$

para todos $(t, \mathbf{y}), (t, \tilde{\mathbf{y}}) \in \Omega$.
Diz-se que $\mathbf{f}$ é **localmente Lipschitz**, ou **localmente lipschitziana**, **relativamente à variável** $\mathbf{y}$ se for lipschitizana em cada subconjunto compacto de Ω.

Proposição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Então, se $\mathbf{f}$ é de classe C^1 na variável $\mathbf{y}$, ou seja, se existem e são contínuas todas as derivadas parciais $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}$, $\mathbf{f}$ é localmente lipschitiziana na variável $\mathbf{y}$.

Teorema (Picard-Lindelöf): Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, localmente lipschitziana na variável $\mathbf{y}$ e $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. Então, o problema de valor inicial para a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

tem solução única num intervalo $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, para algum $\varepsilon > 0$.

Nas mesmas condições, a solução pode ser prolongada de forma única a um intervalo máximo de definição $]T_0, T_1[$ tal que $(t, \mathbf{y}(t)) \to \partial\Omega$ quando $t \to T_0^+$ e $t \to T_1^-$.

Proposição (Comparação): Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funções contínuas, localmente lipschitzianas na variável y e $(t_0, y_0) \in \Omega$. Suponha-se ainda que

$$f(t, y) > g(t, y), \qquad (t, y) \in \Omega.$$

Então, designando por y e $\tilde{y}$ as duas soluções, únicas, dos problemas de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

e

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = g(t, \tilde{y}), \qquad \tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0 \leq y_0,$$

tem-se que $y(t) \geq \tilde{y}(t)$ para $t \geq t_0$ no maior intervalo de tempo de existência comum às duas soluções.

Sistemas Lineares de EDOs de 1ª Ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \qquad A(t), \mathbf{b}(t) \text{ contínuos em } t \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(y) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}(t)y_1(t) + a_{1,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1,n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) = a_{2,1}(t)y_1(t) + a_{2,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2,n}(t)y_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n,1}(t)y_1(t) + a_{n,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{n,n}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

$$a_{i,j}(t), b_j(t) \text{ contínuos em } t \in I \subset \mathbb{R}$$

com condição inicial

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix}$$

Proposição: Sejam $A(t), \mathbf{b}(t)$ respectivamente, uma matriz $n \times n$ e um vector $n \times 1$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, o problema de valor inicial para o sistema linear de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

com $t_0 \in I$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, tem solução única com intervalo de definição máximo I.

Sistemas Lineares de EDOs de 1ª Ordem Homogéneos

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} \qquad A(t) \text{ contínua em } t \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(y) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}(t)y_1(t) + a_{1,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1,n}(t)y_n(t) \\ y_2'(t) = a_{2,1}(t)y_1(t) + a_{2,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2,n}(t)y_n(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n,1}(t)y_1(t) + a_{n,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{n,n}(t)y_n(t) \end{cases}$$

$$a_{i,j}(t) \text{ contínuos em } t \in I \subset \mathbb{R}$$

com condição inicial

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix}$$

Proposição: Seja $A(t)$ uma matriz $n \times n$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, o conjunto das soluções do sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y}$$

constitui um espaço vectorial de dimensão n.
O teorema de Picard-Lindelöf garante a existência de um isomorfismo linear entre o espaço vectorial dos dados iniciais $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ para algum $t_0 \in I$ e o espaço vectorial das soluções.